Lösungen zum Themenheft Angewandte Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Optimierung

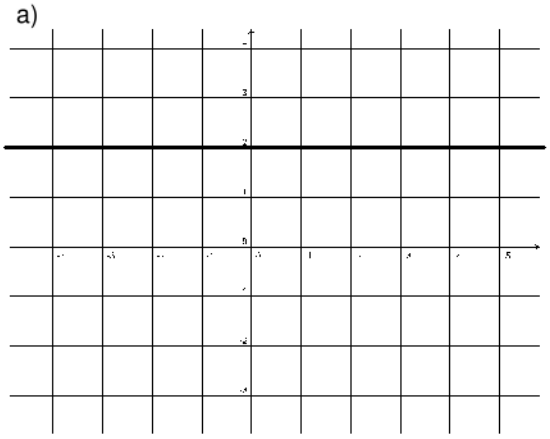
1.1 Mathematische Grundlagen

1.1 Im Themenheft ausgeführt.

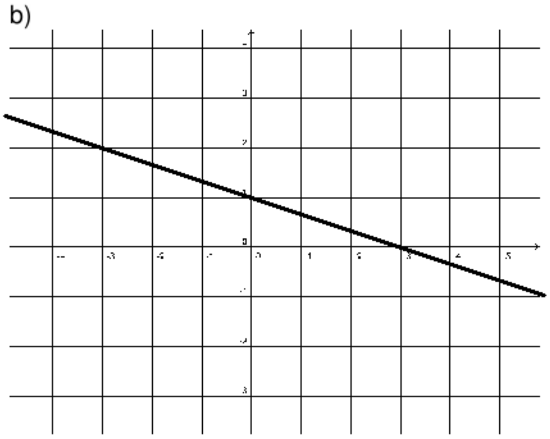
1.2 Im Themenheft ausgeführt.

1.3 Im Themenheft ausgeführt.

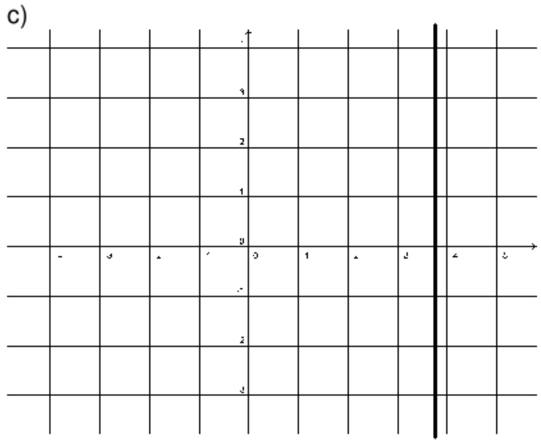
1.4 a)



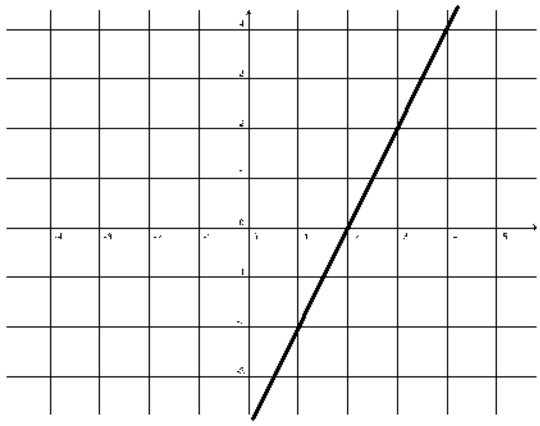
b)



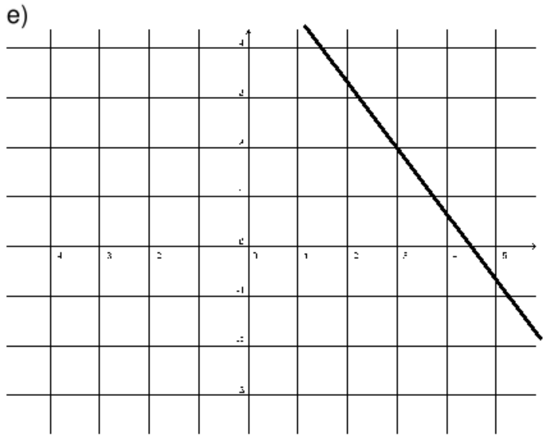
c)



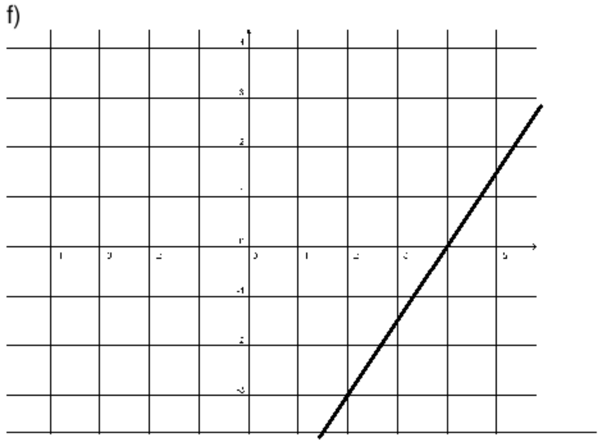
d)



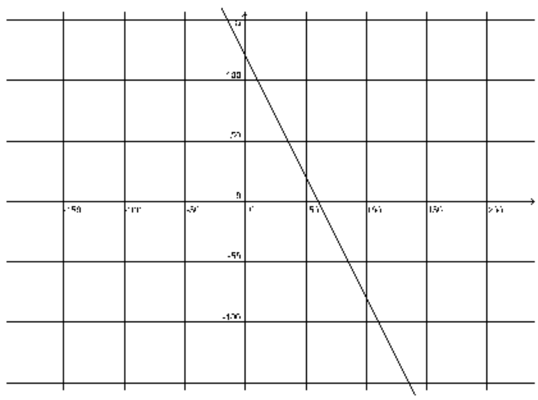
e)



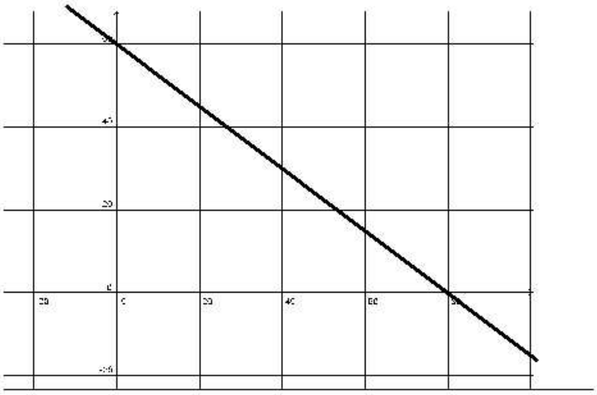
f)



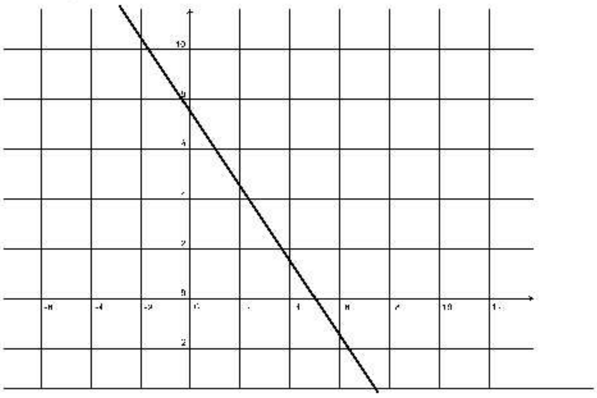
1.5 $2l + b = 120$



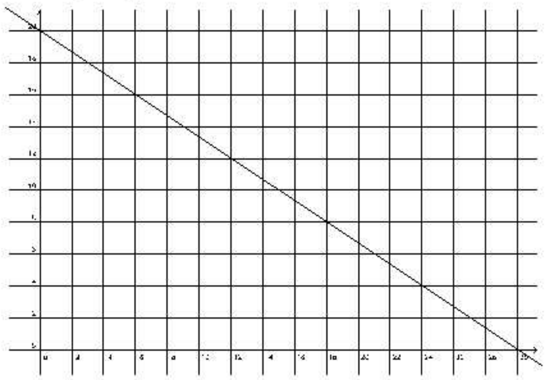
1.6 $0{,}6 \cdot a + 0{,}8 \cdot b = 48$



1.7 $3 \cdot d + 2 \cdot z = 15$

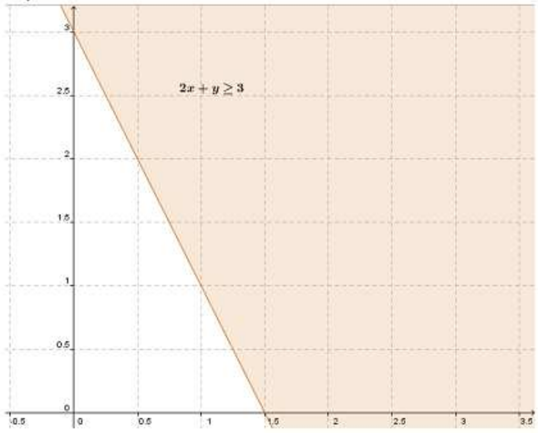


1.8 $4 \cdot x + 6 \cdot y = 120$

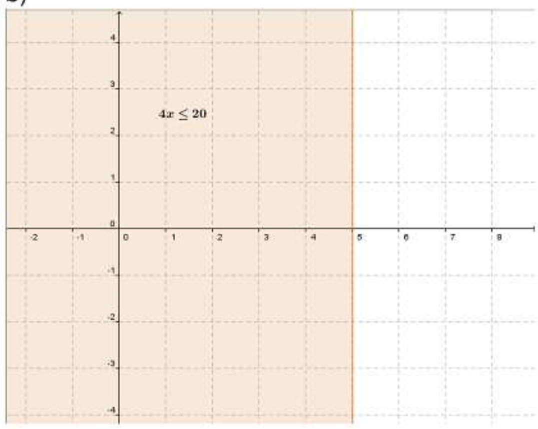


x	y
0	20
3	18
6	16
9	14
12	12
15	10
18	8
21	6
24	4
27	2
30	0

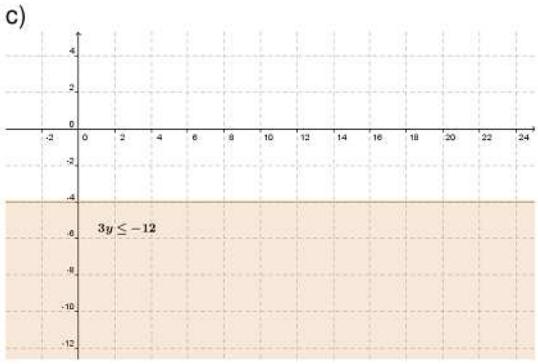
1.9 a)



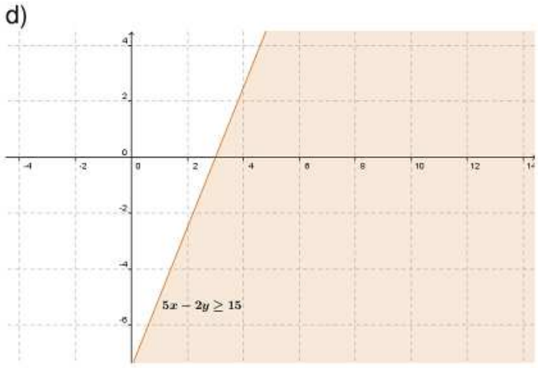
b)



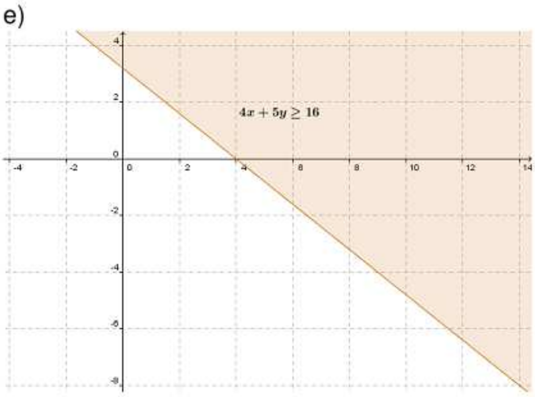
c)



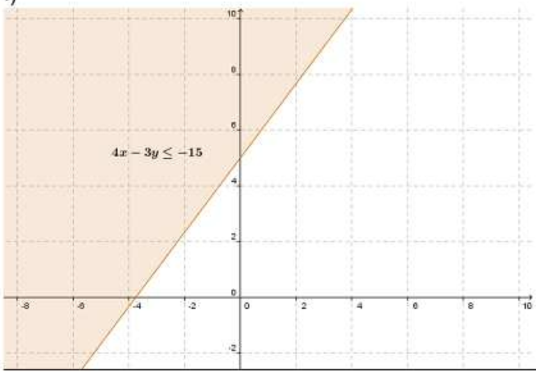
d)



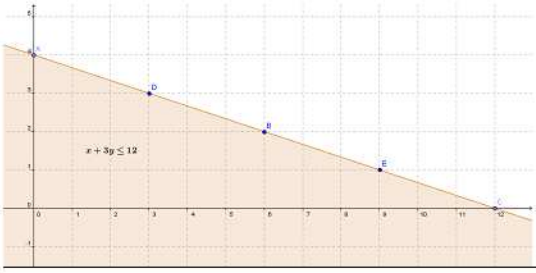
e)



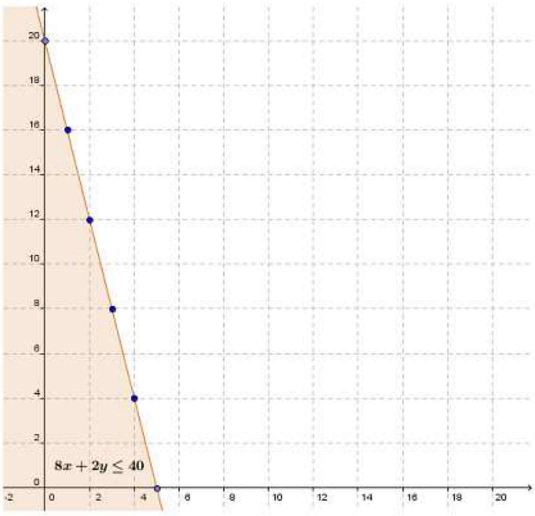
f)



1.10 $p + 3 \cdot b \leq 12$

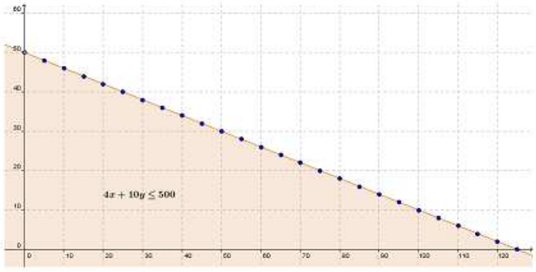


1.11 $8 \cdot p + 2 \cdot g \leq 40$



p	g
5	0
4	4
3	8
2	12
1	16
0	20

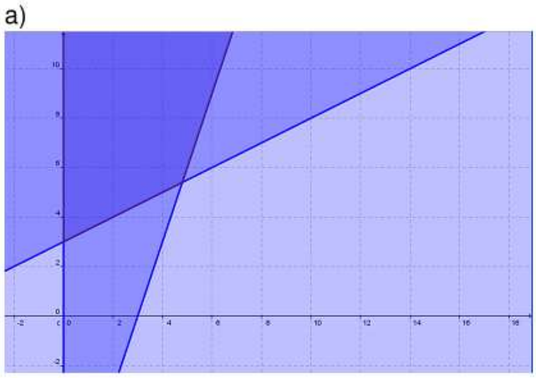
1.12 $4 \cdot x + 10 \cdot y \leq 500$



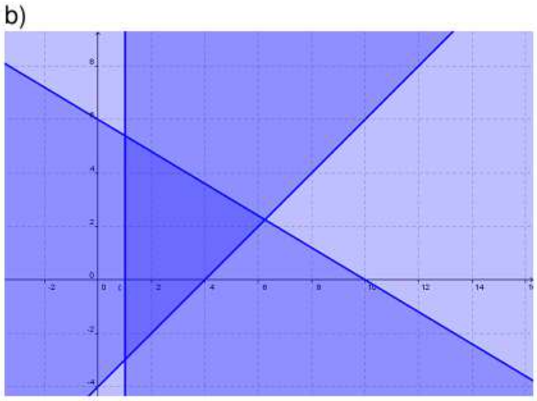
x	y
125	0
120	2
115	4
110	6
...	...
0	50

1.13 Löse grafisch das Ungleichungssystem

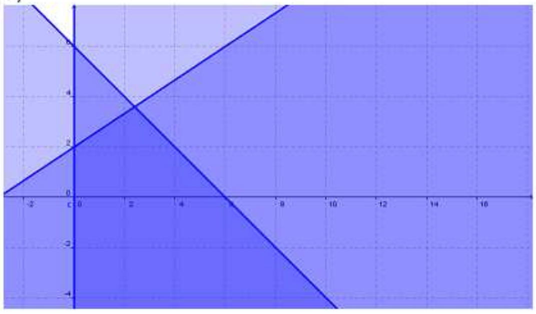
a)



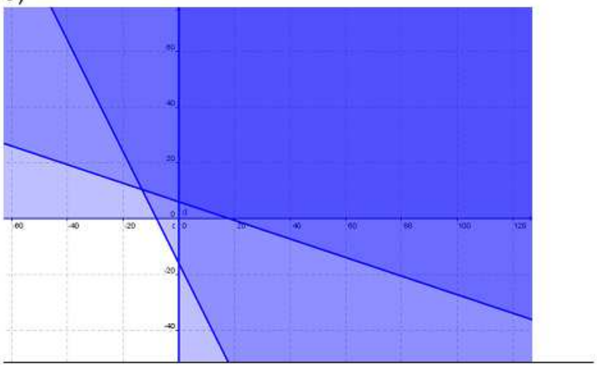
b)



c)

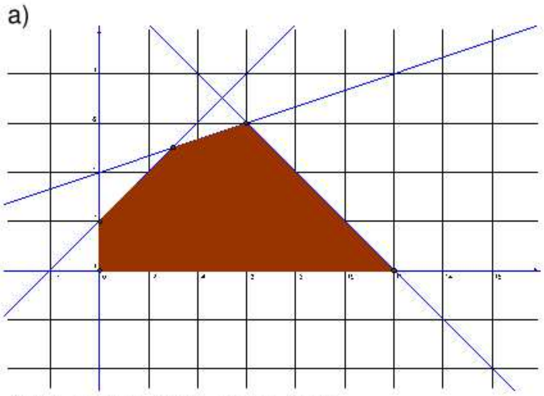


d)



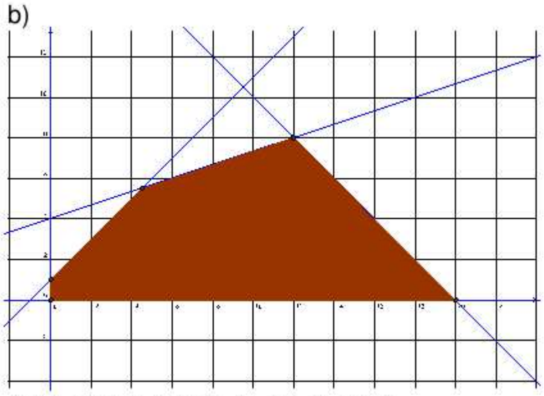
1.14 Löse grafisch das Ungleichungssystem und gib die Eckpunkte des Lösungspolygon an!

a)



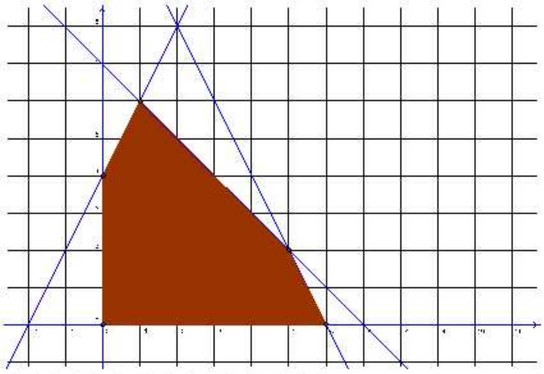
(0|0); (12|0); (6|6); (3|5); (0|6)

b)



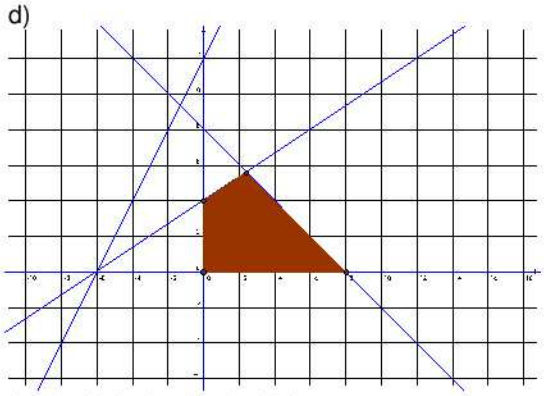
(0|0); (20|0); (12|8); (4,5|5,5); (0|1)

c)



(0|0); (6|0); (5|2); (1|6); (0|4)

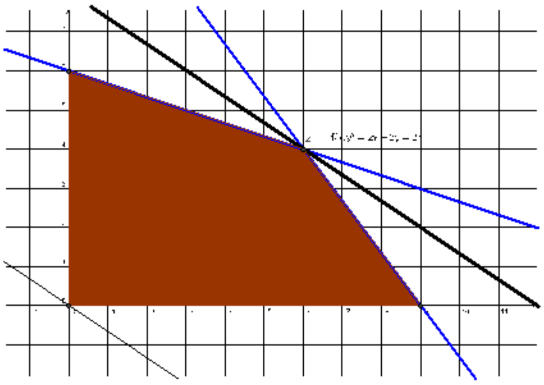
d)



(0|0); (8|0); (2,4|5,6); (0|4)

1.2 Lineare Optimierung - einfache Version

1.15 Im Themenheft ausgeführt.



1.16
$f_{max} = f(6{,}4) = 24$

1.17 $f_{max} = f(3{,}8) = 33$

1.18 $f_{max} = f(65{,}35) = 135$

1.19 $f_{max} = f(10{,}5) = 120$

1.20 $f_{min} = f(2{,}5) = 64$

1.21 $f_{min} = f(6{,}2) = 16$

1.22 $f_{min} = f(8{,}16) = 88$

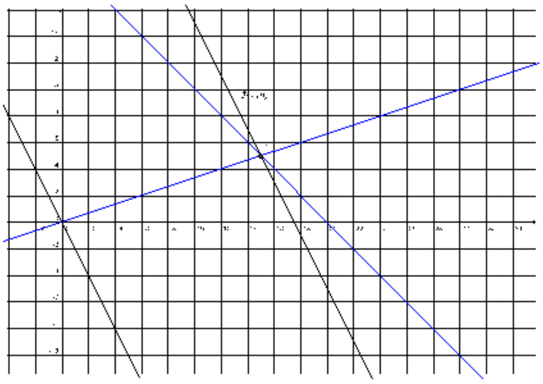
1.23 $f_{min} = f(18{,}6) = 78$

1.24 $f_{max} = f(12{,}6) = 30$

1.25 $f_{max} = f(18{,}8) = 44$

1.26 a)

$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x = 3y \end{cases} \qquad x \geq 0, y \geq 0$$



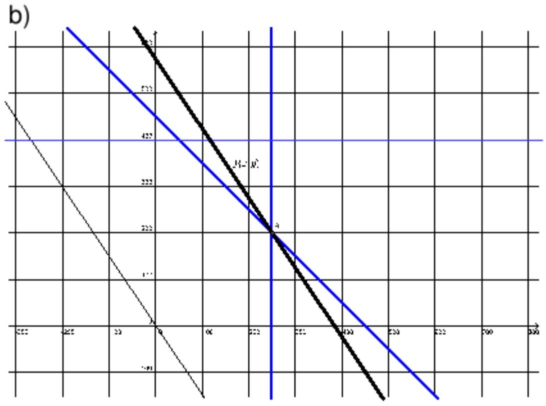
b) $f(x{,}y) = 2500x + 1250y$ soll maximal sein

c) $f_{max} = f(15{,}5) = 43\,750$

1.27 a)

$$\begin{cases} x + y \leq 450 \\ x \leq 250 \\ y \leq 400 \\ 2x = y \end{cases} \qquad x \geq 0, y \geq 0$$

b)



c) $f(x{,}y) = 30x + 20y + 10000$

d) $f_{max} = f(250{,}200) = 11\,500$

1.3 Lineare Optimierung - die volle Version

1.28 Im Themenheft ausgeführt.

1.29 $x\ldots$ Torten; $y\ldots$ Strudel

$$\begin{cases} 12x + 4y \leq 2400 & \text{Konditor} \\ 4x + 8y \leq 2400 & \text{Geselle} \end{cases} \quad x \geq 0, y \geq 0$$

120 Torten und 240 Strudel

Gewinnfunktion: $f(x,y) = 8x + 4y \Rightarrow k = -0{,}5$
$f_{max} = f(120{,}240) = 1\,920$

1.30 $x\ldots$ Schränke; $y\ldots$ Regale

$$\begin{cases} 30x \leq 360 & \text{Maschine A} \\ 30y \leq 400 & \text{Maschine B} \\ 15x + 15y \leq 300 & \text{Maschine C} \\ 30x + 15y \leq 420 & \text{Maschine D} \end{cases} \quad x \geq 0, y \geq 0$$

8 Schränke und 12 Regale

Gewinnfunktion: $f(x,y) = 50x + 40y \Rightarrow k = -1{,}25$
$f_{max} = f(8{,}12) = 800$

1.31 $x\ldots$ Schüsseln; $y\ldots$ Krüge

$$\begin{cases} 2{,}5x + 4y \leq 9600 & \text{formen} \\ 10x + 5y \leq 19200 & \text{brennen} \\ 6x + 5y \leq 14400 & \text{lackieren} \end{cases} \quad x \geq 0, y \geq 0$$

1200 Schüsseln und 1440 Krüge

Gewinnfunktion: $f(x,y) = 12x + 8y \Rightarrow k = -1{,}5$
$f_{max} = f(1200{,}1440) = 25\,920$

1.32 $x\ldots$ Standard; $y\ldots$ Profi

$$\begin{cases} x + y \leq 100 & \text{Maschine A} \\ x + 3y \leq 240 & \text{Maschine B} \\ 2x + y \leq 180 & \text{Maschine C} \end{cases} \quad x \geq 0, y \geq 0$$

30 Standard und 70 Profi

Gewinnfunktion: $f(x,y) = 9x + 12y \Rightarrow k = -0{,}75$
$f_{max} = f(30{,}70) = 1\,150$

1.33 $x\ldots$ Hauptspeise; $y\ldots$ Nachspeise

$$\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}05y <= 50 & \text{Fett} \\ 0{,}2x + 0{,}45y <= 200 & \text{Eiweiß} \\ 0{,}25x + 0{,}4y >= 135 & \text{Kohlehydrate} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

357 g Hauptspeise und 286 g Nachspeise

Gewinnfunktion: $f(x,y) = 0{,}5x + y \Rightarrow k = -0{,}5$
$f_{max} = f(357{,}286) = 4{,}645$

1.34 195 kg Speedkorn, 77 kg Turbokorn

2 Matrizen

2.1 Was sind Matrizen ?

2.1 Im Themenheft ausgeführt.

2.2 Im Themenheft ausgeführt.

2.3 Im Themenheft ausgeführt.

2.2 Rechnen mit Matrizen

2.4 Im Themenheft ausgeführt.

2.5 Im Themenheft ausgeführt.

2.6 Im Themenheft ausgeführt.

2.7 Im Themenheft ausgeführt.

2.8 a) $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A+B = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 13 & 9 \\ -3 & 17 \end{pmatrix}$

c) $3{,}5 \cdot A - 1{,}5 \cdot B = \begin{pmatrix} 13{,}5 & -26{,}5 \\ 55{,}5 & 23{,}5 \\ -6{,}5 & 43{,}5 \end{pmatrix}$

d) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 29 \\ 1 \\ -39 \end{pmatrix}$ e) $B \cdot C = \begin{pmatrix} -30 \\ -2 \\ 38 \end{pmatrix}$

f) $B = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

2.9 Geogebra CAS: Eingabe einer Matrix in der Form `A:={{3,-5},{7,5},{-1,9}}` oder über Tabellenkalkulationsansicht.

Für die Grundrechnungsarten können die normalen Operationszeichen verwendet werden.

Sämtliche zur Verfügung stehenden Befehle für Matrizen findet man unter https://wiki.geogebra.org/de/Matrizen

2.10 Im Themenheft ausgeführt.

2.11 $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Bei den beiden Matrizen handelt es sich um quadratische Matrizen.
- Das Produkt der beiden Matrizen ist gleich (A ist invers zu B und B ist invers zu A).

2.12 Im Themenheft ausgeführt.

2.13 Im Themenheft ausgeführt.

2.14

a) Da die Determinate der Matrix A $det(A) = 0$, liegt hier eine singuläre Matrix vor. Diese lässt sich nicht invertieren.

b) $B^{-1} = B, \det(B) = 1$

c) $C^{-1} = C, \det(C) = -1$

2.15 a) $\det(A \cdot B) = 102, \det(A) \cdot \det(B) = 6 \cdot 17 = 102$

a) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{6}, \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{6}$

2.16 Geogebra CAS:

`Determinate[Matrix]`

`Invertierte[Matrix]`

2.17 Auf Grund des Kommutativgesetzes müssen die beiden Determinanten gleich sein:

$|A| = det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c = a \cdot d - c \cdot b = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = det(A^T) = |A^T|$

2.18 Die Transponierte einer regulären Matrix ist ebenfalls regulär, da ja die beiden Determinanten gleich sind (siehe vorhergehende Aufgabe).

2.3 Gleichungssysteme und Matrizen

2.19 Im Themenheft ausgeführt.

2.20 a) $x = 1; y = 1$

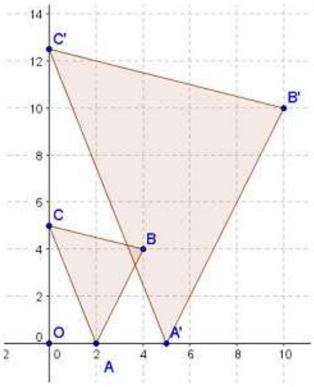
b) $x = 2; y = 3$

2.21 a) $x = 1; y = 1; z = -1$

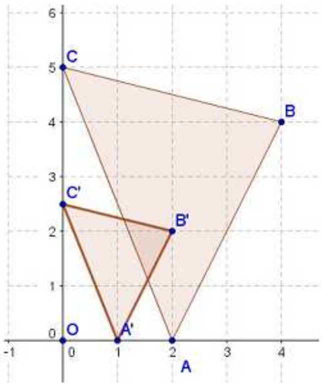
b) $x = 1; y = 1; z = 1$

2.4 Geometrische Abbildungen

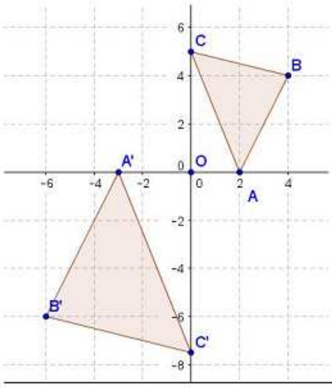
2.22 a) $\frac{5}{2} \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 10 \\ 0 & 12{,}5 \end{pmatrix}$



b) $\frac{1}{2} \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2{,}5 \end{pmatrix}$



c) $-\frac{3}{2} \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -6 & -6 \\ 0 & 7{,}5 \end{pmatrix}$



2.23

In Abhängigkeit von des Parameters k erhalten wir:

$k > 1$	Streckung
$k = 1$	identische Abbildung
$0 < k < 1$	Stauchung
$k = 0$	Abbildung in den Ursprung
$-1 < k < 0$	Spiegelung am Ursprung und Stauchung
$k = -1$	Spiegelung am Ursprung
$k < -1$	Spiegelung am Ursprung und Streckung

2.24

$P' = S \cdot P + (1-k) \cdot Z = k \cdot P + (1-k) \cdot Z = Z + k(P - Z)$

Dies entspricht genau einer zentrische Streckung aus dem Zentrum $Z(z_x|z_y)$ da der Vektor $\vec{ZP}$ um den Faktor k gestreckt wird.

2.25

a) $P' = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot P$

b) $P' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix} \cdot P$

c) $P' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot P$

2.26

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $b) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $d) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2.27

Das vollständige Quadrat als Punktmatrix:

$$Q = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

a) $D_{30} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Gedrehte Punktmatrix:

$$Q'_{30} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

b) $D_{-30} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Gedrehte Punktmatrix:

$$Q'_{-30} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c) $D_{90} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Gedrehte Punktmatrix:

$$Q'_{90} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

2.28

Drehung um 90°

3 Kryptographie

3.1 Substitutionsverfahren

3.1 Im Themenheft ausgeführt.

3.2 Im Themenheft ausgeführt.

3.3 Im Themenheft ausgeführt.

3.2 Hill-Verfahren

3.4 Im Themenheft ausgeführt.

3.5 GEHEIM

3.6 E ist mit $17{,}4\%$ der häufigste Buchstabe in Deutsch. Daher kommt in einem ausreichend langen Text der Geheimtextbuchstabe J am öftesten vor.

3.7 a) FHXTEFHXUK

b) FETTXQAFBO

3.8 Vigenčre ist im Vergleich zum Caesar etwas schwerer zu knacken.

3.9 -

3.10 Für einen Geheimtext g erhalten wir den Klartext durch:

$f^{-1}(\vec{g}) = (\vec{g} - \vec{b}) \cdot A^{-1}$

3.11 -

3.12 -

3.13 -

3.3 RSA-Verfahren

3.14 Im Themenheft ausgeführt.

3.15 Im Themenheft ausgeführt.

3.16 Im Themenheft ausgeführt.

3.17 a) $\varphi(8) = 4$

b) $\varphi(13) = 12$

3.18 a) 8 b) 9 c) 7 d) 15

3.19 Im Themenheft ausgeführt.

3.20 Im Themenheft ausgeführt.

3.21 $N = 35; e = 5; d = 5$; Geheimtext: 5

3.22 -

3.23 296

3.24 212

3.25 -

3.26 -

3.27 -

3.4 Elgamal-Verfahren

3.28 Im Themenheft ausgeführt.

3.29 Im Themenheft ausgeführt.

3.30 -

3.31 -

3.32 -

3.33 -

4 Graphentheorie

4.1 Leonhard Euler und die Brücken von Königsberg

4.1 -

4.2 alle drei

4.3 Eulerweg, Eulerkreis, Eulerweg

4.4 -

4.5 -

4.6 z.B.: Königsberg-Graph: Summe = 14

4.2 Von Zettelausträgern und chinesischen Briefträgern

4.7 z.B.: Beim Brückenproblem soll jede Brücke genau einmal, beim Briefträger- Problem hingegen jede Straße mindestens einmal durchlaufen werden.

4.8 a) z.B. Knotenfolge: 1, 2, 3, 4, 9, 5, 6, 9, 7, 3, 1

b) z.B. Knotenfolge: 1, 8, 7, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 9, 3, 4, 9, 5, 6, 9, 7, 3, 1

Gesamtlänge: 40

4.9 -

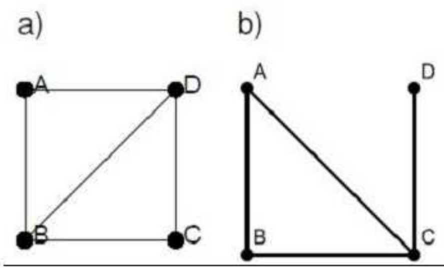
4.10 -

4.11 -

4.12 -

4.13 Im Themenheft ausgeführt.

4.14



4.15

$$\begin{array}{c|l} A & B, D, E \\ B & A, C, E \\ C & B, D, E \\ D & A, C, E \\ E & A, B, C, D \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3 Planare Graphen

4.16 -

4.17 nein, siehe 4.18!

4.18 -

4.4 Kürzeste Wege

4.19 Im Themenheft ausgeführt.

4.20 -

4.21 Leoben (0) - Hieflau (48) - Landl (66) - Scheibbs (113) - Ybbs (135) - Melk (155)

4.5 Das Problem des Handlungsreisenden

4.22 z.B. Beim Königsberger Brückenproblem kommt es nicht auf die Länge des Rundweges an, beim Problem des Handlungsreisenden sehr wohl.

4.23 eine Rundtour mit 540 km:

Leoben-Ka-Mü-Gl-Vö-Ba-Vö-Tr-St.P-Me-Yb-Am-Yb-Sch-Pu-Ma-Te-Ho-Te-Ma-La-Hie-Leoben.

4.24 (a) $5! = 120$

(b) $10!; 20!; 30!; \ldots$

5 Spieltheorie

5.1 bereits durchgeführt

5.2 a)

	B ist fleißig	B ist faul
A ist fleißig	3	4
A ist faul	1	2

b) Die Strategie „faul sein“ liefert für Armin immer den höheren Nutzen, egal was Birgit macht.

5.3 Armin will vor allem eine gute Note. Sein Idealfall ist nun, dass er und Birgit fleißig arbeiten. Andererseits mag er es überhaupt nicht, von Birgit ausgenutzt zu werden. Es ist daher weiterhin die schlechteste Variante, dass er fleißig und Birgit faul ist. Umgekehrt hat er nichts dagegen, auf Birgit’s Kosten faul zu sein. Das ist weiterhin die zweitbeste Möglichkeit.
Wenn Armin nicht riskieren möchte, von Birgit ausgenutzt zu werden (nämlich im Fall „fleißig–faul“), dann sollte er die Strategie „faul“ anwenden. In diesem Fall riskiert er im schlimmsten Fall, dass die zweitschlechteste Variante (der Fall „faul–faul“) eintritt und das ist für ihn weniger schlimm.

5.4 Der schlimmste Fall ist, dass die USA angreift und die UDSSR nicht nachgibt. Das wäre vermutlich ein atomarer Schlagabtausch. Der Idealfall wäre, dass die USA militärische Mittel ergreift und in Kuba einmarschiert und die UDSSR daraufhin nachgibt und ihre Raketenstellungen aufgibt. Im zweitbesten Fall passiert dies nach Verhandlungen.
Eine Auszahlungsmatrix für die UDSSR:

	UDSSR zieht Raketen ab	UDSSR rüstet auf
USA verhandelt	3	4
USA greift an	2	1

1962 konnte ein Atomkrieg gerade noch verhindert werden, indem durch Gespräche ein Kompromiss gefunden wurde und die UDSSR ihre Raketen wieder abzog.

5.5 Das Chickenspiel:

	Fahrer 2 weicht aus	Fahrer 2 fährt weiter
Fahrer 1 weicht aus	3	2
Fahrer 1 fährt weiter	4	1

„Ausweichen“ ist wohl die bessere Strategie: sie schließt aus, dass es zum Frontalzusammenstoß kommt.

5.6 –

5.7 –

5.8 bereits durchgeführt

5.9 bereits durchgeführt

5.10 Beide wollen ihren persönlichen Nutzen optimieren und eine möglichst kurze Haftstrafe bekommen. Daher werden beide gestehen und haben jeweils 4 Jahre Gefängnis vor sich. Würden beide schweigen, dann würden sie mit nur je 2 Jahren Haft davon kommen.

5.11 –

5.12 „faul sein“ ist eine dominante Strategie. Daher werden Birgit und Armin faul sein (und eine eher schlechte Note erhalten).

5.13 a) zu Aufgabe 5.3: Falls Armin fleißig ist, ist es für Birgit ideal, auch fleißig zu sein. Ist jedoch Armin faul, ist es für Birgit besser, ebenfalls faul zu sein. „Fleißig“ ist daher für Birgit keine dominante Strategie. Analog sieht man, dass es auch für Armin keine dominante Strategie gibt.
b) zu Aufgabe 5.4: Falls die USA verhandelt, ist es für die UDSSR besser, weiter aufzurüsten. Wenn jedoch die USA angreift, sollte die UDSSR ihre Raketen abziehen. Die UDSSR hat daher keine dominante Strategie. Auf ähnliche Art zeigt man, dass es auch für die USA keine dominante Strategie gibt.

5.14 Die UDSSR überlegen:

- Wenn wir sie Raketen abziehen, kann im schlimmsten Fall die USA angreifen: Nutzen 2.
- Wenn wir weiter aufrüsten, kann im schlimmsten Fall die USA angreifen und es kommt zu einem Atomkrieg: Nutzen 1.

Vorsichtshalber werden die UDSSR ihre Raketen abziehen, um nicht einen Atomkrieg zu riskieren.

5.15 a) zu Beispiel 5.1: Beide sind faul, damit sie auf keinen Fall vom anderen ausgenutzt werden.
b) zu Beispiel 5.3: Die Minimax-Methode liefert dasselbe Ergebnis wie in Beispiel 5.1: beide sind faul!

5.16 Wenn Albert schweigt, erhält er maximal 5 Jahre Haft, ansonsten maximal 4 Jahre. Daher wird Albert gestehen. Genau dasselbe gilt für Bernhard.

5.17 Zeitschrift1 = Z1; Zeitschrift2 = Z2

	Z2: Preis 2€	Z2: Preis 3€
Z1: Preis 2€	50.000€ , 50.000€	100.000€ , 0€
Z1: Preis 3€	0€ , 100.000€	60.000€ , 60.000€

Die Strategie „Preis 2€ “ ist für beide Zeitschriften dominant und wird daher gewählt werden. Die Maximin-Methode führt zu derselben Lösung: Keiner riskiert, mit einem Preis von 3€ nichts zu verkaufen und keinen Gewinn zu machen.

5.18 Einen Hirsch gemeinsam zu erlegen ist beiden Jägern 5-mal so viel wert als mit einem Hasen vorlieb nehmen zu müssen. Das Spiel hat 2 Nash-Gleichgewichte „Hirsch-Hirsch“ und „Hase-Hase“. „Hase-Hase“ ist auch die Lösung des Spiels nach der Maximin-Methode. Es gibt keine dominante Strategie. Daher werden sich die Jäger auf die Hasenjagd begeben.

5.19 Das eigene Hobby gemeinsam mit dem anderen ist

3-mal so viel wert wie umgekehrt beim Hobby des anderen dabei zu sein. Absolut wertlos ist es, die Zeit alleine zu verbringen.
Das Spiel hat 2 Nash-Gleichgewichte „Kino-Kino“ und „Fußball-Fußball“. Es gibt keine Lösung nach der Maximin-Methode und auch keine dominante Strategie. Der Kampf der Geschlechter hat daher keine Lösung.

5.20 Infblatt hat die dominante Strategie „Preis gleich lassen“ und wird daher diese Strategie wählen. Newsblatt weiß das und wählt daher die für sie bessere Strategie: „Preis gleich lassen“.
Nach der Maximin-Methode wählen Infblatt und Newsblatt ebenfalls die Strategie „Preis gleich lassen“, damit sie bestimmt keinen Verlust machen.
Dass beide den Preis beibehalten, ist auch das einzige Nash-Gleichgewicht dieses Spiels. Alle Methoden führen zu derselben Lösung!

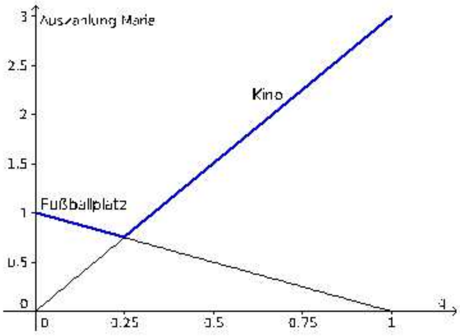
5.21
„faul sein“ ist für beide Spieler dominant und wird daher gewählt. Bei der Maximin-Methode auf jeden Fall den schlechtesten Nutzen 1 verhindern. Dieser kann auftreten, wenn man fleißig ist. Daher führt auch diese Methode zur Lösung „faul sein“. Dies auch ein Nash-Gleichgewicht: Würde einer der beiden zur Strategie „fleißig“ wechseln, würde er vom anderen ausgenutzt und hätte nur mehr Nutzen 1. „fleißig-fleißig“ ist leider kein Nash-Gleichgewicht, weil es sich in diesem Fall lohnt, zur Strategie „faul“ zu wechseln.

5.22
a) zu 5.3: Nash-Gleichgewichte sind „fleißig-fleißig“ und „faul-faul“. Die Minimax-Methode liefert als Lösung „faul-faul“.
b) zu 5.4: Nash-Gleichgewichte sind „angeifen-Raketen abziehen“ und „verhandeln-aufrüsten“. Die Minimax-Methode liefert als Lösung „verhandeln-Raketen abziehen“. Diese Lösung ist leider instabil, weil für beide Spieler eine Änderung ihrer Strategie vorteilhaft ist. Dass dies trotzdem nicht passiert, muss durch spezielle Vereinbarungen abgesichert werden.

5.23
Schere gewinnt gegen Papier, Stein gewinnt gegen Schere und Papier gewinnt gegen Stein. Das Aufeinandertreffen zweier gleicher Strategien führt zu einem Unentschieden.
In jeder Zeile (Spieler1) bzw. in jeder Spalte (Spieler2) gibt es genau eine 1 für Sieg, die markiert wird. Dabei treffen niemals zwei 1-er bei einer Strategiekombination zusammen (Das wäre dann ein Nash-Gleichgewicht).

5.24
Marie geht
- in das Kino: $\Rightarrow a_{Marie} = 3 \cdot q + 0 \cdot (1 - q) = 3q$
- auf den Fußballplatz: $\Rightarrow$
$$a_{Marie} = o \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = 1 - q$$

graphisch:



Für $q = 0{,}25$ ist die Auszahlung von Marie $0{,}75$. Dieser Wert hängt nicht davon ab, was Dominik macht.

5.25 2. Fall: Falls Marie ihre gemischte Strategie einseitig ändert, ist p ist variabel ($q = 0{,}25$ bleibt unverändert). Wenn Marie in das Kino geht, ist ihr Nutzen $3q = 0{,}75$. Geht sie auf den Fußballplatz, ist ihr Nutzen ebenfalls $1 - q = 0{,}75$. Unabhängig davon, mit welcher Wahrscheinlichkeit p Marie in das Kino geht (oder mit welcher Wahrscheinlichkeit $1 - p$ sie auf den Fußballplatz geht), ist ihr mittlerer Nutzen immer gleich $0{,}75$. Sie kann daher ihren Nutzen nicht verbessern, indem sie ihre gemischte Strategie ändert.

5.26 Nash-Gleichgewicht: Dominik sollte mit 75%-iger Wahrscheinlichkeit in das Kino gehen. Marie sollte mit 25%-iger Wahrscheinlichkeit in das Kino gehen.
Dominik hat den mittleren Nutzen $3 \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = 2q + 1$, wenn er in das Kino geht. Geht er in das Konzert, hat er den Nutzen $2 \cdot (1 - q) = 2 - 2q$. Im Nash-Gleichgewicht ist $p = \frac{3}{4}$ und $q = \frac{1}{4}$ und sein mittlerer Nutzen daher $\frac{3}{4}(2q + 1) + \frac{1}{4}(2 - 2q) = \frac{3}{4} \cdot 1{,}5 + \frac{1}{4} \cdot 1{,}5 = 1{,}5$.
Ähnlich erhält man, dass auch Maries mittlerer Nutzen im Nash-Gleichgewicht gleich $1{,}5$ ist.

5.27
Im Nash-Gleichgewicht sollten beide Jäger mit 20%-iger Wahrscheinlichkeit auf die Hirschjagd gehen, mit 80%-iger Wahrscheinlichkeit auf Hasenjagd. Ihr mittlerer Nutzen ist jeweils 1.

5.28
Wenn Clemens auf die falsche Seite ausweicht, hat er schlechte Chancen, den Punkt zu machen. Spielt Alfred auf seine Vorhand, macht er mit 50%-iger Wahrscheinlichkeit auch dann den Punkt, wenn Clemens auf die richtige Seite geht.
Nash-Gleichgewicht: Alfred sollte in 5 von 7 Fällen auf die Vorhand (nach links) spielen, also mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 71%. Clemens sollte in 4 von 7 Fällen nach links ausweichen, also mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 57%.
Im Nash-Gleichgewicht hat Alfred einen Nutzen von $\frac{41}{70} \approx 0{,}586$ zu erwarten. Er wird also in etwa 58,6% der Fälle, die im Nash-Gleichgewicht gespielt werden, den Punkt machen. Demgemäß ist der mittlere Nutzen von Clemens $\frac{29}{70}$.

5.29
Im Nash-Gleichgewicht werden alle 3 Strategien mit derselben Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ gewählt. Der mittlere Nutzen der beiden Spieler beträgt im Nash-Gleichgewicht 0.

6 Lösungen Interpolation und Splines

6.1 Interpolation

6.1 a) $a = 5; b = 2; c = 1$

b) $b_0 = 4; b_1 = 1; b_2 = 1$

6.2 -

6.3 -

6.4 -

6.5 -

6.6 -

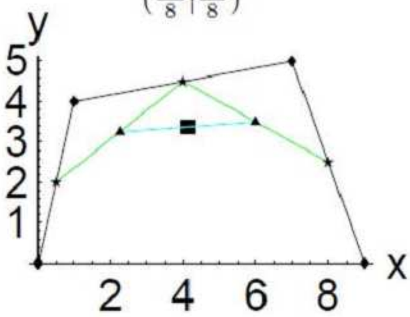
6.2 Splines

6.7 -

6.8

$$\begin{array}{ccccccc} A & & B & & C & & D \\ (0|0) & & (1|4) & & (7|5) & & (9|0) \\ & (\frac{1}{2}|2) & & (4|\frac{9}{2}) & & (8|\frac{5}{2}) & \\ & & (\frac{9}{4}|\frac{13}{4}) & & (6|\frac{7}{2}) & & \\ & & & (\frac{33}{8}|\frac{27}{8}) & & & \end{array}$$

a)



b) -

6.9 -

6.10 -

6.3 Splines

6.11 -